Méth. Mat. Phys. - Chapitre 8

Equations différentielles ordinaires

EPFL

- **Equation différentielle ordinaire :** linéaire inhomogène d'ordre n

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)\, y'(x)$$
$$+ p_0(x)\, y(x) = f(x) \tag{8.1}$$

- **Equation différentielle ordinaire :** linéaire inhomogène d'ordre 2

$$y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_0(x)\, y(x) = f(x) \tag{8.2}$$

- **Solution générale :** EDO - linéaire inhomogène d'ordre 2

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + y_p(x) \tag{8.20}$$

où c_1 et c_2 fixés par les conditions au bord et $y_p(x)$ solution particulière.

- **Equation différentielle ordinaire :** linéaire homogène d'ordre 2

$$y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_0(x)\, y(x) = 0 \tag{8.3}$$

- **Solution générale :** EDO - linéaire homogène d'ordre 2

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) \tag{8.19}$$

- **Solution générale :** ansatz : développement en série autour de $x_0 \neq 0$

$$y\left(x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(x - x_0\right)^{s+j} \qquad \text{où} \qquad s \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad a_0 \neq 0 \qquad (8.24)$$

- **Solution générale :** ansatz : développement en série autour de $x_0 = 0$

$$y\left(x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, x^{s+j} \qquad \text{où} \qquad s \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad a_0 \neq 0 \qquad (8.25)$$

1. Polynômes d'Hermite : $H_n\left(x\right)$
2. Polynômes de Laguerre : $L_n\left(x\right)$
3. Polynômes de Legendre : $P_\ell\left(x\right)$
4. Fonctions de Bessel : $J_m\left(x\right)$

- **Méthode de Frobenius :**

1. Equation différentielle homogène développée en séries de puissances
2. Décalage de l'indice muet j (puissances identiques)
3. Equation indicielle (paramètre s) et relation de récurrence (coefficients a_j)

- **Equation différentielle ordinaire :** homogène linéaire d'ordre 2

$$y''(x) + p_1(x)\,y'(x) + p_0(x)\,y(x) = 0 \tag{8.3}$$

- **Solution générale et dérivée première :** homogène d'ordre 2

$$y(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x)$$

$$y'(x) = c_1\,y_1'(x) + c_2\,y_2'(x) \tag{8.34}$$

- **Solution générale et dérivée première :** écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{8.35}$$

- **Wronskien :** non-nul : $y_1(x)$ et $y_2(x)$ linéairement indépendants

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x) \neq 0 \tag{8.36}$$

- **Dérivée du wronskien :** où $y_1'(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2'(x) = 0$

$$W'(x) = y_1(x)\,y_2''(x) - y_1''(x)\,y_2(x) \tag{8.37}$$

- **Equation différentielle ordinaire :** solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$

$$y_1''(x) + p_1(x)\,y_1'(x) + p_0(x)\,y_1(x) = 0$$

$$y_2''(x) + p_1(x)\,y_2'(x) + p_0(x)\,y_2(x) = 0 \tag{8.38}$$

- **Equation différentielle ordinaire du wronskien :** homogène d'ordre 1

$$W'(x) = -\,p_1(x)\,W(x) \tag{8.40}$$

- **Primitive de l'équation différentielle ordinaire :** variable muette x'

$$\int^{W(x)} \frac{dW(x')}{W(x')} = -\int^{x} p_1(x')\,dx' \tag{8.41}$$

- **Solution de l'équation différentielle ordinaire :**

$$\ln\left(W(x)\right) = -\int^{x} p_1(x')\,dx'$$

- **Wronskien :** défini à une constante près

$$W\left(x\right) = \exp\left(-\int^{x} p_1\left(x'\right) dx'\right) \tag{8.42}$$

- **Wronskien :** remis en forme

$$W\left(x\right) = y_1\left(x\right) y_2'\left(x\right) - y_1'\left(x\right) y_2\left(x\right) = y_1\left(x\right)^2 \left(\frac{y_2\left(x\right)}{y_1\left(x\right)}\right)' \tag{8.43}$$

- **Equation différentielle ordinaire :** rapport des solutions

$$\left(\frac{y_2\left(x\right)}{y_1\left(x\right)}\right)' = \frac{W\left(x\right)}{y_1\left(x\right)^2} \tag{8.44}$$

- **Deuxième solution :**

$$y_2\left(x\right) = y_1\left(x\right) \int^{x} \frac{W\left(x'\right)}{y_1\left(x'\right)^2}\, dx' \tag{8.45}$$

- **Deuxième solution :** cas particulier : $p_1\left(x'\right) = 0$ alors $W\left(x'\right) = 1$

$$y_2\left(x\right) = y_1\left(x\right) \int^{x} \frac{dx'}{y_1\left(x'\right)^2} \tag{8.46}$$

- **Equation différentielle ordinaire :** inhomogène linéaire d'ordre 2

$$\mathcal{L}\, y\left(x\right) = y''\left(x\right) + p_1\left(x\right) y'\left(x\right) + p_0\left(x\right) y\left(x\right) = f\left(x\right) \tag{8.48}$$

où la solution particulière $y_p\left(x\right)$ est donnée par les fonctions de Green $G\left(x - x'\right)$.

- **Source ponctuelle :**

$$f\left(x\right) = f_0\, \delta\left(x - x'\right) \tag{8.50}$$

- **Equation de Green :** $\mathcal{L}\, G\left(x - x'\right) = \delta\left(x - x'\right)$ (8.51)

$$G''\left(x - x'\right) + p_1\left(x\right) G'\left(x - x'\right) + p_0\left(x\right) G\left(x - x'\right) = \delta\left(x - x'\right) \tag{8.52}$$

- **Fonction de Green :** causalité

$$G\left(x - x'\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x' \\ A\left(x'\right)\, y_1\left(x\right) + B\left(x'\right)\, y_2\left(x\right) & \text{si} \quad x > x' \end{cases} \tag{8.53}$$

- **Fonction de Green :** en $x = x'$ par continuité

$$A\left(x'\right)\, y_1\left(x'\right) + B\left(x'\right)\, y_2\left(x'\right) = 0 \tag{8.54}$$

- **Intégrale :** équation de Green

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\Big(G''\left(x-x'\right)+p_1\left(x\right)G'\left(x-x'\right)+p_0\left(x\right)G\left(x-x'\right)\Big)\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\delta\left(x-x'\right)dx=1 \qquad (8.56)$$

- **Continuité de la fonction de Green :** en $x=x'$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}p_0\left(x\right)G\left(x-x'\right)dx=0 \qquad (8.57)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}p_1\left(x\right)G'\left(x-x'\right)dx= \qquad (8.58)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}p_1\left(x\right)G\left(x-x'\right)\Big|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}p_1'\left(x\right)G\left(x-x'\right)dx=0$$

- **Intégrale :** équation de Green (8.57) et (8.58) dans (8.56)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}G''\left(x-x'\right)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}G'\left(x-x'\right)\Big|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}=1 \qquad (8.59)$$

- **Fonction de Green :** dérivée première par rapport x

$$G'(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x' \\ A(x')\, y_1'(x) + B(x')\, y_2'(x) & \text{si} \quad x > x' \end{cases} \tag{8.55}$$

- **Dérivée à droite de la fonction de Green :** en $x = x'$ (8.59)

$$A(x')\, y_1'(x') + B(x')\, y_2'(x') = 1 \tag{8.60}$$

- **Système matriciel :** en $x = x'$ (8.54) et (8.60)

$$\begin{pmatrix} y_1(x') & y_2(x') \\ y_1'(x') & y_2'(x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(x') \\ B(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.61}$$

- **Coefficients :** en $x = x'$

$$\begin{pmatrix} A(x') \\ B(x') \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x')} \begin{pmatrix} y_2'(x') & -y_2(x') \\ -y_1'(x') & y_1(x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{y_2(x')}{W(x')} \\ \dfrac{y_1(x')}{W(x')} \end{pmatrix} \tag{8.62}$$

- **Fonction de Green :** (8.62) dans (8.53) et causalité

$$G\left(x-x'\right)=-\frac{y_{1}\left(x\right)y_{2}\left(x'\right)-y_{2}\left(x\right)y_{1}\left(x'\right)}{W\left(x'\right)}\,\Theta\left(x-x'\right) \tag{8.63}$$

- **Solution particulière :** source quelconque $f\left(x\right)$

$$y_{p}\left(x\right)=\left(G*f\right)\left(x\right)=\int^{x}G\left(x-x'\right)\,f\left(x'\right)\,dx' \tag{8.64}$$

- **Solution particulière :** fonction des solutions du système homogène

$$y_{p}\left(x\right)=y_{2}\left(x\right)\int^{x}\frac{y_{1}\left(x'\right)f\left(x'\right)}{W\left(x'\right)}\,dx'-y_{1}\left(x\right)\int^{x}\frac{y_{2}\left(x'\right)f\left(x'\right)}{W\left(x'\right)}\,dx' \tag{8.38}$$

- **Méthode de résolution des EDO :**
  1. Première solution homogène $y_{1}\left(x\right)$: calcul ou ansatz
  2. Deuxième solution homogène $y_{2}\left(x\right)$: méthode du wronskien
  3. Solution particulière $y_{p}\left(x\right)$: méthode de Green

- **Equation de Laguerre :** partie radiale de l'équation de Schrödinger pour l'électron d'un atome d'hydrogène

$$x\,L_n''(x) + (1-x)\,L_n'(x) + n\,L_n(x) = 0 \qquad \text{où} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{8.66}$$

- **Méthode de Frobenius :**

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,x^{s+j} \qquad \text{où} \qquad a_0 \neq 0 \tag{8.67}$$

- **Equation de Laguerre :** séries de puissances (8.67) dans (8.66)

$$x\sum_{j=0}^{\infty}(s+j-1)(s+j)\,a_j\,x^{s+j-2}$$

$$+(1-x)\sum_{j=0}^{\infty}(s+j)\,a_j\,x^{s+j-1} + n\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,x^{s+j} = 0 \tag{8.68}$$

- **Séries de puissances :** (8.68) remis en forme

$$\sum_{j=0}^{\infty}(s+j)^2\,a_j\,x^{s+j-1} - \sum_{j=0}^{\infty}(s+j-n)\,a_j\,x^{s+j} = 0 \tag{8.69}$$

- **Séries de puissances :** (8.41) 1ère somme : $j \to j+1$

$$s^2\, a_0\, x^{s-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \Big((s+j+1)^2\, a_{j+1} - (s+j-n)\, a_j \Big)\, x^{s+j} = 0 \qquad (8.70)$$

- **Equation indicielle :** facteur de x^{s-1} nul dans (8.70)

$$s^2\, a_0 = 0 \qquad \text{où} \qquad a_0 \neq 0 \qquad \text{ainsi} \qquad s = 0 \qquad (8.71)$$

- **Relation de récurrence :** facteur de x^{s+j} nul dans (8.70) avec $s = 0$

$$a_{j+1} = \frac{j-n}{(j+1)^2}\, a_j \qquad (8.73)$$

- **Premiers coefficients :** (8.44)

$$a_1 = \frac{-n}{1^2}\, a_0 = \frac{(-1)\, n}{(1!)^2}\, a_0$$

$$a_2 = \frac{1-n}{2^2}\, a_1 = \frac{(-1)^2\, n\,(n-1)}{(2!)^2}\, a_0 \qquad (8.74)$$

$$a_3 = \frac{2-n}{3^2}\, a_2 = \frac{(-1)^3\, n\,(n-1)\,(n-2)}{(3!)^2}\, a_0$$

- **Dernier coefficient :** (8.73) où $j = n$

$$a_{n+1} = \frac{n - n}{(n+1)^2}\, a_n = 0 \tag{8.75}$$

Par récurrence, tous les coefficients a_j où $j > n$ sont nuls.

- **Coefficients quelconques :** $(8.45) - (8.48)$ où $0 < j \leqslant n$

$$a_j = \frac{(-1)^j\, n\,(n-1)\ldots(n-j+1)}{(j!)^2}\, a_0$$

$$= \frac{(-1)^j\, n\,(n-1)\ldots(n-j+1)\,(n-j)\,(n-j-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-j)\,(n-j-1)\ldots 2\cdot 1\,(j!)^2}\, a_0$$

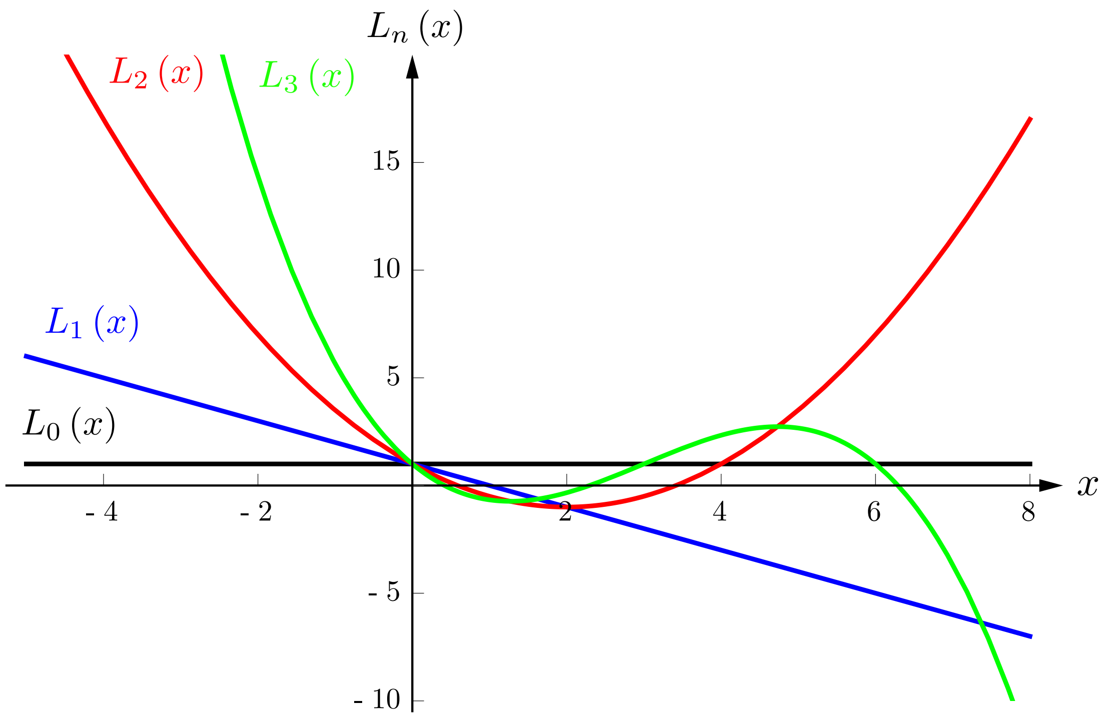
$$= \frac{(-1)^j\, n!}{(n-j)!\,(j!)^2}\, a_0 = \frac{(-1)^j}{j!}\binom{n}{j}\, a_0 \tag{8.76}$$

- **Polynôme de Laguerre :** (8.67) avec $a_0 = 1$, $s = 0$ et $0 < j \leqslant n$

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n}{j} x^j \tag{8.77}$$

$L_0(x) = 1$ et $L_2(x) = \dfrac{1}{2!}\left(x^2 - 4x + 2\right)$

$L_1(x) = -x + 1$ et $L_3(x) = \dfrac{1}{3!}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right)$



- **Oscillateur harmonique forcé :**

$$\ddot{x}\,(t) + 2\,\gamma\,\dot{x}\,(t) + \omega_0^2\,x\,(t) = \frac{1}{m}\,f\,(t) \tag{8.80}$$

- **Solutions :** système homogène : $f\,(t) = 0$

$$x\,(t) = e^{\,\lambda\,t} \qquad \text{où} \qquad \lambda \in \mathbb{C} \tag{8.83}$$

- **Equation caractéristique :** (8.83) dans (8.80) où $f\,(t) = 0$

$$\lambda^2 + 2\,\gamma\,\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{8.84}$$

- **Coefficients caractéristiques :** amortissement faible : $\gamma < \omega_0$

$$\lambda_{\pm} = -\,\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \,\omega_0^2} \equiv -\,\gamma \pm i\omega \qquad \text{ainsi} \qquad \lambda_+ + \lambda_- = -\,2\,\gamma \tag{8.85}$$

- **Première solution :** système homogène : $f\,(t) = 0$

$$x_1\,(t) = e^{\,\lambda_+\,t} = e^{-\,\gamma\,t}\,e^{\,i\omega\,t} \tag{8.87}$$

- **Wronskien :** où $p_1\,(t') = 2\,\gamma$

$$W\,(t) = \exp\left(-\int^t 2\,\gamma\,dt'\right) = e^{-\,2\,\gamma\,t} \tag{8.88}$$

- **Deuxième solution :** système homogène : où $\lambda_- = -\,(2\,\gamma + \lambda_+)$

$$x_2\,(t) = e^{\,\lambda_+\,t}\int^t \frac{e^{-\,2\,\gamma\,t'}}{\left(e^{\,\lambda_+\,t'}\right)^2}\;dt' = e^{\,\lambda_+\,t}\int^t e^{-\,2(\gamma+\lambda_+)t'}\,dt'$$

$$= -\,\frac{e^{\,\lambda_+\,t}\,e^{-\,2(\gamma+\lambda_+)t}}{2\,(\gamma+\lambda_+)} = -\,\frac{e^{-\,(2\,\gamma+\lambda_+)t}}{2\,\gamma + 2\,\lambda_+} = -\,\frac{e^{\,\lambda_-\,t}}{\lambda_+ -\,\lambda_-} \tag{8.89}$$

- **Deuxième solution :**

$$x_2\,(t) = -\,\frac{e^{\,\lambda_-\,t}}{\lambda_+ -\,\lambda_-} = -\,\frac{e^{-\,\gamma\,t}\,e^{-\,i\omega\,t}}{2i\omega} \tag{8.90}$$

- **Fonction de Green :** (8.87), (8.88) et (8.90) dans (8.63) et causalité

$$G\,(t -\,t') = -\,\frac{x_1\,(t)\,x_2\,(t') -\,x_2\,(t)\,x_1\,(t')}{W\,(t')}\;\Theta\,(t -\,t') \tag{8.91}$$

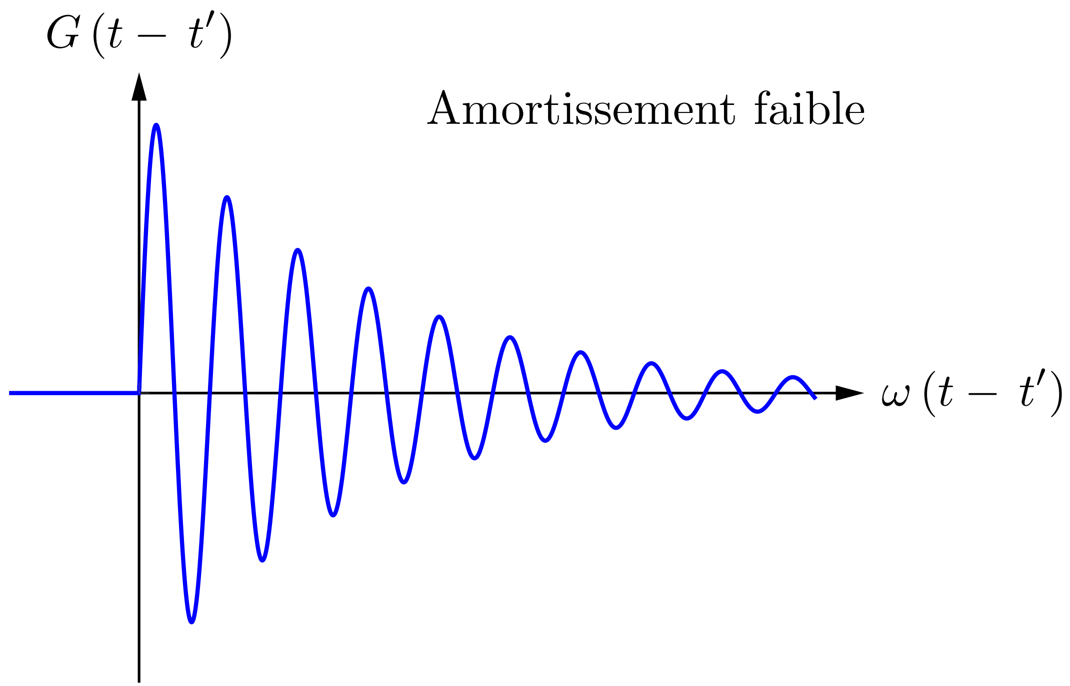
$$= e^{-\,\gamma(t-\,t')}\;\frac{e^{\,i\sqrt{\omega_0^2-\,\gamma^2}\,(t-\,t')} -\,e^{-\,i\sqrt{\omega_0^2-\,\gamma^2}\,(t-\,t')}}{2i\sqrt{\omega_0^2 -\,\gamma^2}}\;\Theta\,(t -\,t')$$

- **Amortissement faible :** $\gamma < \omega_0$: pulsation

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{8.92}$$

- **Fonction de Green :** amortissement faible $\gamma < \omega_0$: (8.92) dans (8.91)

$$G\left(t - t'\right) = e^{-\gamma\left(t - t'\right)}\,\frac{\sin\Big(\omega\left(t - t'\right)\Big)}{\omega}\,\Theta\left(t - t'\right) \tag{8.93}$$

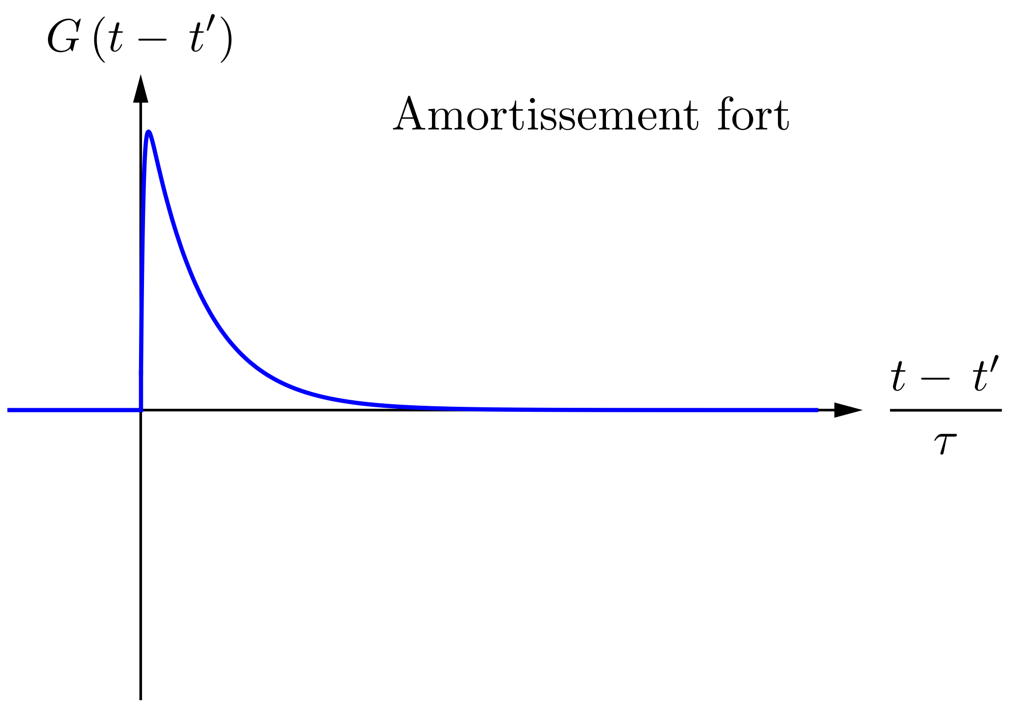


- **Amortissement fort :** $\gamma > \omega_0$: temps d'amortissement

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \tag{8.94}$$

- **Fonction de Green :** amortissement faible $\gamma < \omega_0$: (8.94) dans (8.91)

$$G\left(t - t'\right) = e^{-\gamma\left(t - t'\right)}\, \tau \sinh\left(\frac{t - t'}{\tau}\right) \Theta\left(t - t'\right) \tag{8.95}$$



L'implémentation des méthodes du wronskien et de Green est nettement plus simple et directe que le calcul de l'intégrale de contour d'une transformation de Fourier inverse à l'aide du théorème des résidus effectués en sect. 7.6 ! Les fonctions de Green ainsi obtenues sont les mêmes...